Respuesta a la rampa unitaria

Nuevamente, teniendo como punto de partida la ecuación (5) e ingresando en la entrada del sistema una señal del tipo rampa unitaria, vemos que:

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$

Tenemos que la transformada de Laplace de la función rampa unitaria es $\frac{1}{s^2}$ vamos a someter a nuestro sistema a esta entrada, es decir:

$$y(s) = \frac{1}{Ts+1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2(Ts+1)} \qquad (11)$$

La ecuación (11) puede ser resuelta por medio de fracciones parciales, considerando 3 raíces o polos, quedando en la forma:

$$y(s) = \frac{1}{s^2(Ts+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{(Ts+1)} \qquad (12)$$

Obteniendo los valores de A, B y C, tenemos:

$$B = \left| s^2 \frac{1}{s^2(Ts+1)} \right|_{s=0} = 1$$

$$C = \left| (Ts+1)\,\frac{1}{s^2(Ts+1)} \right|_{s=\frac{-1}{T}} = T^2$$

Como tenemos dos raíces, A y B, con el mismo valor, calculamos el valor de A en la siguiente forma. Partiendo de la ecuación (12), tenemos que:

$$\frac{1}{s^2(Ts+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{(Ts+1)}$$

Multiplicamos el lado derecho de (12) por el denominador del lado izquierdo:

$$1 = \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{(Ts+1)}\right)[s^2(Ts+1)]$$

Realizando la multiplicación por cada elemento del lado derecho, obtenemos

$$1 = \mathrm{A}s(Ts+1) + B(Ts+1) + Cs^2 \qquad (13)$$

Sustituyendo los valores de B y C en (13):

$$1 = \mathrm{A}s(Ts+1) + 1(Ts+1) + T^2s^2 \qquad (14)$$

Suponiendo que s=1, tenemos:

$$1 = \mathrm{A}(T+1) + T + 1 + T^2 \qquad (15)$$

Despejando A de (15):

$$\mathrm{A} = \frac{1 - T - 1 - T^2}{T+1} = \frac{-T - T^2}{T+1} = -T\frac{1+T}{T+1} = -T$$

Ya habiendo obtenido los tres valores de A, B y C, estos los sustituimos en la ecuación (12), dando como resultado:

$$y(s) = \frac{-T}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{T^2}{(Ts+1)} \qquad (16)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a (16):

$$y(t) = -T + t + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{T^2}{(Ts+1)}\right\}$$

Para poder aplicar la $\mathcal{L}^{-1}$ a $\frac{T^2}{(Ts+1)}$ es necesario normalizar esa parte para dejar el elemento lineal s con un coeficiente igual a 1, dividimos tal sección entre T:

$$\frac{T^2}{(Ts+1)} = \frac{\frac{T^2}{T}}{\frac{Ts}{T}+\frac{1}{T}} = \frac{T}{s+\frac{1}{T}}$$

Quedando:

$$y(t) = -T + t + T\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right\} \qquad (17)$$

Con esta representación, ahora si es posible aplicar la $\mathcal{L}^{-1}$ a (17), de lo cual obtenemos:

$$y(t) = -T + t + Te^{\frac{-t}{T}} \qquad (18)$$

La ecuación (18) es la representación general de nuestro sistema de primer orden cuando se le ingresa como entrada una señal rampa, obteniendo la salida $y(t)$.

Sin embargo, para realizar la comparativa con respecto al valor de entrada $y(r)$, es necesario calcular el error existente en $y(t)$, en la siguiente forma:

$$e = y(r) - y(t)$$

Donde:

$y(r)$ es una señal rampa pura.
$y(t)$ es la señal de salida después de ser procesada por nuestro sistema.

Ahora bien, suponiendo $y(r) = t$:

$$e = t - \left(-T + t + Te^{\frac{-t}{T}}\right) = t + T - t - Te^{\frac{-t}{T}}$$

$$e = T\left(1 - e^{\frac{-t}{T}}\right) \qquad (19)$$

De la ecuación (19) se puede observar que conforme t tiende a infinito, $e^{\frac{-t}{T}}$ se aproxima a cero, por tanto, la señal de error e se aproxima a T.

En la Figura 3, podemos observar el comportamiento de un sistema de primer orden, comparando una entrada rampa $y(r)$ con respecto a la salida $y(t)$, se puede observar el error en la salida.

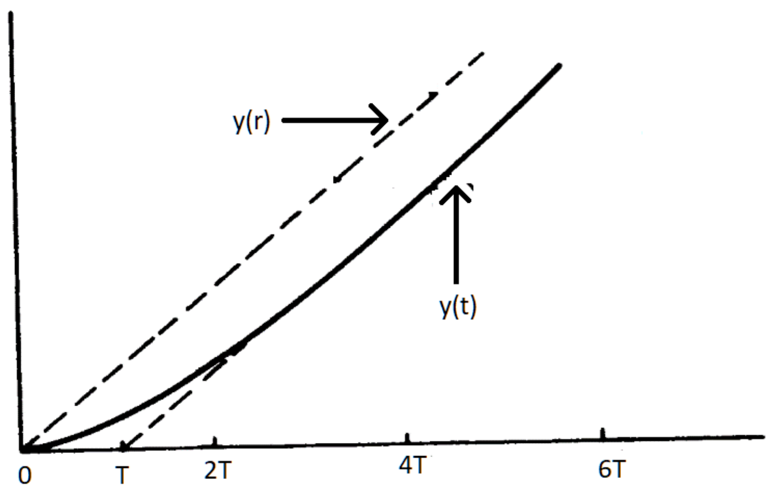

Figura 3. Curva de respuesta de un sistema de primer orden a una entrada rampa. [Elaboración propia].